

一种基于隐式多项式曲线的形状自适应描述方法

吴 刚

(南京财经大学电子商务重点实验室, 江苏南京 210003)

摘 要: 隐式多项式曲线对目标形状的线性描述算法需要构造隐式多项式曲线的代数残差和梯度残差, 但是如何加权平衡这两种残差是一个困难问题. 提出了一种平衡这两种残差的自适应权重确定算法. 根据隐式多项式曲线稳定性要求, 构造了隐式多项式曲线系数向量范数和权重的关系式, 进而计算出极小值点并作为最优权重, 实现了隐式多项式曲线的自适应描述. 从 MPEG-7 标准测试集中选取不同形状的图形进行描述, 实验结果表明, 根据自适应权重获取的隐式多项式曲线不仅保证了描述的精确性, 而且十分稳定, 没有出现多余的曲线.

关键词: 隐式多项式曲线; 形状描述; 自适应权重

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)03-0505-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.03.013

An Adaptive Shape Description Method Based on Implicit Polynomial Curves

WU Gang

(Key Lab of Electronic Business, Nanjing University of Finance and Economic, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

Abstract: The residual sum of squares of implicit polynomial (IP) and its gradients are constructed as objective function that can be minimized to obtain the fitted IP curve for representing a given shape. However, how to balance the two residual sum of squares using a weight factor is a difficult problem. The adaptive weight algorithm was proposed to determine the weight factor. Firstly, the function formula for the coefficient vector norm of IP curve and the weight were constructed according to the stability of IP curve. Secondly, the minimizer of the the function was computed, and used as the weight. Lastly, the IP curve can be obtained by minimizing the objective function with weight. The performance of the proposed method was evaluated on the standard MPEG-7 shape database, and the experimental results show that the IP curve obtained by proposed algorithm can represent the object shapes both accurately and stably.

Key words: implicit polynomial curve; shape description; adaptive weight

1 引言

隐式多项式曲线是一种平面曲线, 在直角坐标系 ($O - XY$) 中, k 次隐式多项式曲线方程可表示为

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq k, i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{k0}x^k + a_{k-1,1}x^{k-1}y + \dots + a_{0k}y^k = 0$$

为了研究的方便, 隐式多项式 $f(x, y)$ 也常常改写成系数和项的向量积形式

$$f(x, y) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{A}^T = (a_1 \quad a_2 \dots a_{m-1} \quad a_m)$

$\mathbf{X}^T = [1 \quad x \quad y \quad \dots \quad x^k \quad x^{k-1}y \quad \dots \quad y^k]$, m 是 $f(x, y)$ 中单项式的数目, 即系数向量 \mathbf{A} 的元素个数, 并且有 $m = (k+1)(k+2)/2$.

隐式多项式曲线用来描述目标形状要求具有有界性和封闭性两个特性, 也就是使用隐式多项式曲线描述目标形状的时候, 最为理想的状况是没有多余的曲线. 使用隐式多项式曲线描述目标形状明显优于其它方法, 这主要由于隐式多项式曲线精确的表达力, 描述的参数完全取决于隐式多项式曲线的次数和系数, 有明确的解析式, 便于操纵和使用, 更重要的是它具有天然的数据噪声过滤能力和修补能力^[1]. 隐式多项式曲线已经广泛应用到许多领域, 例如目标识别^[2]和图像数据库索引^[3]等等.

对于平面数据点集合 S , 寻找隐式多项式曲线 $f(x, y) = 0$, 使它尽可能通过这些数据点, 这是基于隐式多项式曲线进行形状描述的基本问题, 其实质就是求解隐式多项式的系数. 目前国内外大量文献提出了很多算法实现隐式多项式曲线的形状描述, 总体上可以分为两类, 一类是非线性方法, 就是建立非线性目标函数, 采用优化的方法, 寻找最优的隐式多项式函数系数. 文献[4~6]提出的算法都属于这一类. 这些基于非线性目标函数的优化拟合算法都需要迭代求解, 很可能陷入局部极小, 使获得的隐式多项式曲线不能精确的描述数据点集合特征, 更为困难的是这类算法严重依赖初始值的选取, 也就是怎样选取恰当的初始值是一个困难的问题. 另外, 这类拟合算法和其它通过迭代寻优的算法一样都面临优化的速度慢, 收敛不确定等问题.

鉴于非线性目标函数优化有十分明显的缺点, 而且很难克服, 因而许多学者又转而寻求改进线性最小二乘算法, 以期快速获得描述结果, 这就是线性方法. 文献[7]提出了 3L 算法, 文献[8]提出了针对 3L 算法的改进措施, 其基本思想是根据每一个数据点的具体位置, 计算其梯度值, 使隐式多项式函数的梯度在数据点上等于这些梯度值, 从而获取一组线性方程, 它们和过零点的线性方程组合成新的线性方程组, 然后使用线性最小二乘算法求解隐式多项式曲线的系数. 很明显, 这种算法需要计算离散点的差分替代偏导数值, 因而特别受数据点的影响, 如果噪声很大, 将造成隐式多项式曲线很不稳定. 文献[9]提出了 Min-Max 算法对此又作了进一步的改进, 即对隐式多项式的偏导函数进行规范化, 这种算法由于引入了统一的标准化手段, 使得计算的偏导函数值得到均值化处理, 相对而言算法较为稳定. 但是这类线性算法中, 存在如何加权平衡隐式多项式曲线的代数残差和梯度残差问题.

本文的主要贡献是提出了平衡隐式多项式曲线的代数残差和目标形状梯度残差的权重计算公式, 给出了具体的自适应权重选择算法, 使基于隐式多项式曲线的目标形状描述更加稳定可靠.

2 相关工作

由于非线性方法的不稳定性, 目前线性算法已经成为隐式多项式曲线描述目标形状的主要方法, 其中典型的有文献[8]提出的 Gradient-One 算法和文献[9]提出的 Min-Max 算法. 这两种算法的实质就是构造三个残差, 然后对这三个残差之和关于隐式多项式系数求极小值. 在形状数据集合中点的分布和密度以及部分点缺失的情况下, 线性算法的稳定性和精确性等问题可以参考文献[8]和文献[9]的相关研究内容. 下面我们

以 Min-Max 算法为例介绍线性算法的基本思想.

将目标形状上各点坐标 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 代入隐式多项式 $f(x, y)$, 然后将所有获得的隐式多项式值进行相加, 即可以获得第一个残差, 我们称之为代数残差, 并记作 E_f .

$$E_f = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)^2 \quad (2)$$

计算隐式多项式函数在 x 方向关于形状曲线上每一点的偏导函数值, 然后将该值减去形状曲线上对应点梯度方向关于 x 轴的夹角正弦 ($\sin\alpha_i$), 求出所有点对应的差值后相加, 即可构造第二个残差, 记为 E_x . 同样关于 x 轴的夹角余弦 ($\cos\alpha_i$) 可以构造第三个残差, 记为 E_y , 我们称这两个残差为梯度残差. 为了方便, 根据式(1), 可以将这两个残差写成向量的形式

$$E_x = \|M_x A - B_1\|_2^2, E_y = \|M_y A - B_2\|_2^2$$

将式(2)的 E_f 也写成向量形式并和以上两个残差相加, 同时增加权重因子 μ , 即可获得隐式多项式的总残差.

$$E = \|M_0 A - B_0\|_2^2 + \mu \|M_x A - B_1\|_2^2 + \mu \|M_y A - B_2\|_2^2 \quad (3)$$

其中:

$$M_0 = [X(x_1, y_1) \quad X(x_2, y_2) \quad \dots \quad X(x_n, y_n)]^T,$$

B_0 为具有 n 个 0 元素的向量,

$$M_x = \left[\frac{X_x(x_1, y_1)}{\|X(x_1, y_1)\|_1} \quad \frac{X_x(x_2, y_2)}{\|X(x_2, y_2)\|_1} \quad \dots \quad \frac{X_x(x_n, y_n)}{\|X(x_n, y_n)\|_1} \right]^T,$$

$$B_1 = [\cos\alpha_1 \quad \dots \quad \cos\alpha_i \quad \dots \quad \cos\alpha_{n-1} \quad \cos\alpha_n]^T,$$

$$M_y = \left[\frac{X_y(x_1, y_1)}{\|X(x_1, y_1)\|_1} \quad \frac{X_y(x_2, y_2)}{\|X(x_2, y_2)\|_1} \quad \dots \quad \frac{X_y(x_n, y_n)}{\|X(x_n, y_n)\|_1} \right]^T,$$

$$B_2 = [\sin\alpha_1 \quad \dots \quad \sin\alpha_i \quad \dots \quad \sin\alpha_{n-1} \quad \sin\alpha_n]^T.$$

参数 μ 是式(1)和式(2)相比较的权重, 其作用主要是: 如果式(2)的残差太大, 可以通过调整 μ 值, 使得基于形状的梯度残差在最小二乘运算时获得平衡. μ 值一般选取大于 0 的实数.

对式(3)关于 A 求导并令其为 0, 则得到下面的方程

$$(M_0^T M_0 + \mu M_1^T M_1 + \mu M_2^T M_2) A = M_0 B_0 + \mu M_1 B_1 + \mu M_2 B_2 \quad (4)$$

应该指出矩阵 $M_0^T M_0 + \mu M_1^T M_1 + \mu M_2^T M_2$ 可能是奇异的, 或者是条件数很大, 造成求解的隐式多项式系数非常不稳定, 为了解决这个问题, 需要将这个矩阵加上一个单位矩阵 $E^{[8]}$, 于是式(4)可改写为

$$(M_0^T M_0 + \mu M_1^T M_1 + \mu M_2^T M_2 + \mu E) A = M_0 B_0 + \mu M_1 B_1 + \mu M_2 B_2 \quad (5)$$

式(5)求解的系数向量 A 是否稳定严重依赖于权重 μ 的选取. 图 1 是使用 Min-Max 算法, 对于汽车形状的图形选取 6 次隐式多项式曲线, 在权重 μ 取不同值

时描述的结果.可以观察到,随着权重 μ 值的增加,隐式多项式曲线对物体形状的描述越来越精确,但是大于某一值后,描述效果却越来越差.具体原因是:权重 μ 取值过小时,式(2)代数残差在形状描述中的作用较大,造成了隐式多项式曲线极不稳定,具体表现就是描述曲线发散,有很多分支曲线.另一方面,当权重 μ 取值过大时,突出了曲线形状的梯度残差作用,这样的结果就是描述的曲线过多的考虑了梯度信息,虽然没有了多余的曲线,但是物体形状上的点和描述曲线的距离很远,造成了描述失败.

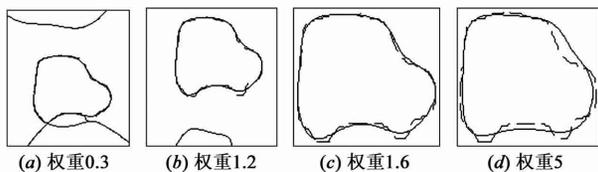


图1 Min-Max算法拟合的隐式多项式曲线

上面的分析可以发现,选取合适的权重 μ 值十分重要.文献[8~10]都没有解决这个问题,这些文献提出的替代方法就是通过人机交互,选取不同权重 μ 值,然后观察描述效果,从而最终确定 μ 的取值.这显然是不科学的,不仅仅实时性不强,最重要的是 μ 值是一个实数,无法通过多次试验唯一地确定最优 μ 值.这极大地限制了隐式多项式曲线在目标形状描述中的应用.

本文通过对线性描述算法的分析,建立权重 μ 取值的数学模型,进而给出一种自适应确定 μ 值的算法,理论和实验表明,这种自适应 μ 值选取是十分有效的.

3 线性描述算法的权重自适应确定

本节以 Min-Max 算法为例,给出具体自适应确定权重的方法.对于 Gradient-One 等其它线性算法,可以和采用 Min-Max 算法一样方法做简单推广即可.

定理 1 对于式(5),假设权重 x 取值为 x_k ,根据权重的值 x_k 求得的隐式多项式曲线系数向量为 A_k ,则权重取 x 时,对应的隐式多项式曲线的系数满足下面的函数形式

$$A(x) = \frac{x_k}{x}(A_k - B) + B \quad (6)$$

其中

$$B = (M_1^T M_1 + M_2^T M_2 + E)^{-1} (M_1 B_1 + M_2 B_2)$$

证明:将式(5)中 μ 取值为 x_k ,则有

$$\begin{aligned} & (M_0^T M_0 + x_k M_1^T M_1 + x_k M_2^T M_2 + x_k E) A_k \\ & = M_0 B_0 + x_k M_1 B_1 + x_k M_2 B_2 \end{aligned} \quad (7)$$

将 μ 取值为 x 时,则有

$$\begin{aligned} & (M_0^T M_0 + x M_1^T M_1 + x M_2^T M_2 + x E) A \\ & = M_0 B_0 + x M_1 B_1 + x M_2 B_2 \end{aligned}$$

将以上两个方程的左右两边分别相减,并考虑 $M_0^T M_0 (A - A_k)$ 近似为 0, $M_0 B_0 = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} & (M_1^T M_1 + M_2^T M_2 + E) (A x - A_k x_k) \\ & = (x - x_k) (M_1 B_1 + M_2 B_2) \end{aligned}$$

解该方程组有

$$\begin{aligned} A & = \frac{x_k}{x} A_k + \frac{x - x_k}{x} (M_1 + M_2^T M_2 + E)^{-1} \\ & \quad \cdot (M_1 B_1 + M_2 B_2) \end{aligned}$$

显然隐式多项式系数向量 A 是关于 x 的向量函数,上式即可写成式(6)的形式.证毕.

上面的定理 1 指出:确定 x_k 并根据式(5)求出 A_k 以后,在 x_k 附近,隐式多项式曲线的系数向量满足式(6)的函数关系.事实上 A 的稳定性就是要求 $\|A\|$ 在 x 取某一值时,其变化最小,因此需要讨论式(6)的函数性质,并给出 x 的取值,本文讨论的向量范数都是 2 范数.于是我们有下面的定理.

定理 2 式(6)确定的向量函数范数 $y = \|A(x)\|_2^2$ 如果存在极小值,则极小值点 x 的取值为

$$x = x_k \frac{(A_k - B)^T (A_k - B)}{B^T (B - A_k)} \quad (8)$$

证明:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|A(x)\|_2^2}{\partial x} & = \frac{\partial \left\| \frac{x_k}{x} (A_k - B) + B \right\|_2^2}{\partial x} \\ & = -2 \left(\frac{x_k (A_k - B)^T}{x} + B^T \right) \frac{x_k (A_k - B)}{x^2} \\ & = -2 \frac{x_k^2 (A_k - B)^T (A_k - B)}{x^3} - 2 \frac{x_k B^T (A_k - B)}{x^2} \end{aligned}$$

令上式为 0, 求出 $\|A(x)\|_2$ 取极小值时 x 的取值,于是有

$$x_k B^T (A_k - B) x + x_k^2 (A_k - B)^T (A_k - B) = 0$$

这个方程即得式(8). 证毕.

定理 3 根据式(8)确定的权重 x 的值一定存在并且是正实数

证明:因为

$$B = (M_1^T M_1 + M_2^T M_2 + E)^{-1} (M_1 B_1 + M_2 B_2)$$

故有

$$(M_1^T M_1 + M_2^T M_2 + E) x_k B = (x_k M_1 B_1 + x_k M_2 B_2)$$

将式(7)和上式左右两边分别做减法运算有

$$x_k (M_1^T M_1 + M_2^T M_2 + E) (B - A_k) - M_0^T M_0 A_k = 0$$

因而有

$$x_k (M_1^T M_1 + M_2^T M_2 + E) (B - A_k) = M_0^T M_0 A_k$$

即有

$$x_k (B - A_k) = (M_1^T M_1 + M_2^T M_2 + E)^{-1} M_0^T M_0 A_k$$

上式两边同时乘以 B^T , 并且注意 B 的取值, 即有

$$x_k B^T (B - A_k) = (M_1 B_1 + M_2 B_2)^T$$

$$\cdot [(\mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_2 + \mathbf{E})^{-1}]^2 \mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{A}_k$$

由 Min-Max 算法的几何意义可知, $\mathbf{M}_1 \mathbf{B}_1$ 的每一个元素是隐式多项式函数梯度正弦和目标形状梯度正弦的乘积, 而 $\mathbf{M}_2 \mathbf{B}_2$ 的每一个元素是隐式多项式函数梯度余弦和目标形状梯度余弦的乘积, 因而这两个向量都是非负实数向量. $\mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{A}$ 的每一个元素表示形状曲线上每一个点到隐式多项式函数曲线的代数距离, 另外, 权重 x_k 为非负数, 由此可知 $\mathbf{B}^T (\mathbf{B} - \mathbf{A}_k) > 0$. 故式(8)的权重 x 一定存在, 并且是大于 0 的实数. 证毕.

定理 3 实际上说明式(6)一定存在极小值, 而且极小值点为正实数并是唯一的. 这就确保了 Min-Max 算法可以自适应确定权重, 以平衡代数残差和梯度残差在最小二乘运算时造成的不稳定现象.

以上自适应确定权重的方法可以完全应用于 Gradient-One 算法、3L 算法以及改进的 3L 算法, 对这些线性算法只要做简单推广就可以, 没有任何实质差别. 由于篇幅所限, 本文不重复演算.

我们在分析隐式多项式曲线的系数稳定时, 最重要的依据就是当权重发生变化的时候, 要求系数向量的范数变化率最小. 但是, 当根据式(8)获得极小值点时, 并不能完全确定在权重取该极小值点的时候, 隐式多项式曲线是最优描述, 这是因为极小值点及其领域点对应的系数向量范数变化率十分微小, 取极小值点作为权重可能放大了形状梯度残差的作用, 我们通过一个例子说明这个问题. 图 2(a) 中的曲线是 $y = \|\mathbf{A}(x)\|_2$ 的函数曲线, 此时的 $x_k = 1$. “*” 是该函数的极小值点, 其值为 10.3129, 很明显, x 在 $[1, \infty]$ 区间取值时, $\|\mathbf{A}(x)\|_2$ 的对应值变化很小, 相差不到 1 个单位, 也就是该极值点对应的曲线曲率非常小, 如果权重取极小值 10.3129, 反而造成曲线描述过度的考虑了梯度残差的影响, 致使曲线描述效果下降. 这种情况, 只需要取曲率极大值对应的极值点作为权重即可, 如图 2(a) 中的正方形点, 其值为 2.0034. 图 2(b) 是 x 取极小值 10.3129 时, 6 次隐式多项式曲线描述的结果, 图 2(c) 是曲率极大值点 2.0034 作为权重描述的结果. 其中虚线为物体形状曲线, 实粗线为描述的 6 次隐式多项式曲线. 可以很明显的观察到 x 取极小值 10.3129 时, 帽子的中间边缘描述存在较大误差, 而取曲率极大值点 2.0034 作为权重, 达到了非常好的描述效果.



图2 极值点的曲率过小对隐式多项式曲线描述的影响

以上分析表明当权重取值为 x_k , 并且系数向量范数已经十分稳定的时候, 可以取曲率的极大值点作为权重, 而不能直接选取 $y = \|\mathbf{A}(x)\|_2$ 的极小值点作为权重, 其理论依据是在这个曲率极大值点, 隐式多项式曲线系数向量的范数衰减的最快. 极小值点是否为最优权重可以通过计算其曲线曲率来确定, 如果其曲率小于 0.1, 说明极小值点附近的曲线几乎为直线. 下面我们推导出 $y = \|\mathbf{A}(x)\|_2$ 函数曲线在点 x 处的曲率公式.

由 $\mathbf{A}(x) = \frac{x_k}{x} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}) + \mathbf{B}$, 可以写出 $y = \|\mathbf{A}(x)\|_2$ 的函数形式如下:

$$y = \sqrt{\left(\frac{x_k}{x} (\mathbf{A}_k^T - \mathbf{B}^T) + \mathbf{B}^T \right) \left(\frac{x_k}{x} (\mathbf{A}_k - \mathbf{B}) + \mathbf{B} \right)}$$

对上式关于 x 求一阶和二阶导数, 即得

$$y' = \frac{z'}{2\sqrt{z}}, \quad y'' = -\frac{1}{4z^{3/2}} (z')^2 + \frac{1}{2\sqrt{z}} z''$$

其中 $z = \frac{x_k^2}{x^2} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k + 2x_k \frac{\mathbf{A}_k^T \mathbf{B}}{x} + \mathbf{B}^T \mathbf{B}$,

$$z' = -2 \frac{x_k^2}{x^3} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k - 2x_k \frac{\mathbf{A}_k^T \mathbf{B}}{x^2},$$

$$z'' = 6 \frac{x_k^2}{x^4} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k + 4x_k \frac{\mathbf{A}_k^T \mathbf{B}}{x^3}.$$

```

input: dataset, degree /* 输入形状数据集点和拟合的隐式多项式曲线次数. */
output: weightValue /* 输出计算获得的权重. */
coeff = fitMinMax(dataset, degree) /* 使用 Min-Max 算法拟合 dataset, 获取 coeff. */
minPoint = computeMinimum(coeff) /* 基于该隐式多项式曲线, 根据公式(8)计算最小值点. */
curvatureValue = computeCurvature(minPoint) /* 根据式(9)计算式(6)在 minPoint 点的曲率 */
if curvatureValue >= 0.1 /* 如果该曲率值大于等于 0.1, 则 */
return minPoint /* 返回 minPoint, 即是残差平衡权重 */
else
maxPoint = computeMaxCurvature /* 如果曲率小于 0.1, 计算式(6)的最大曲率值点获得 maxPoint */
return maxPoint /* 返回计算获得最大曲率值对应点 maxPoint 即为残差平衡权重 */
end

```

图3 自适应确定权重算法

根据以上公式, 我们很容易写出点 x 的曲率公式即有

$$k = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^2} \quad (9)$$

由于 \mathbf{A}_k 和 \mathbf{B} 都是一维向量, 因而只要给出 x 值, 可以很快计算出 x 对应的曲线曲率. 图 2(a) 中极值点的曲率使用式(9)计算的结果为 0.0006, 这表明在该点附近曲线段几乎是直线. 这样就很容易将该点作为权重排除掉, 从而直接计算曲率极大值点. 图 2(c) 就是计

算出最优权重为 2.0034 时隐式多项式曲线描述的结果. 曲率极大值可以根据式(9)求导或者使用数值方法给出. 根据以上分析, 我们很容易得出自适应确定权值的算法. 图 3 是实现该算法的伪代码.

4 实验结果和讨论

本节选取常用 Benchmark 测试集中的形状图形检验本文提出的自适应权重确定的有效性. 在目前线性隐式多项式曲线的描述算法中, 由于经典最小二乘算法效果太差, 因此本节只和最为有效的 M3L 算法以及没有加权的 GradientOne 算法以及 Min-Max 算法做比较实验. 另外需要特别说明的是, 隐式多项式曲线不适合描述非常复杂的形状^[10], 因此本文只讨论能够为线性算法充分描述的形状图形.

4.1 形状测试数据

我们选用的标准测试集是常用的 MPEG-7 图像数据库^[11]. 从这些图形中, 我们选取不同形状的 15 类图形, 如图 4 所示. 由于隐式多项式曲线精确描述形状曲线不仅仅取决于隐式多项式的系数, 而且取决于其次数, 因此为了便于做比较实验, 我们选取的图形都可以为 6 次或者 8 次隐式多项式曲线描述. 更为复杂的图形可以通过提高隐式多项式曲线的次数来获得更为精确的形状描述模型.

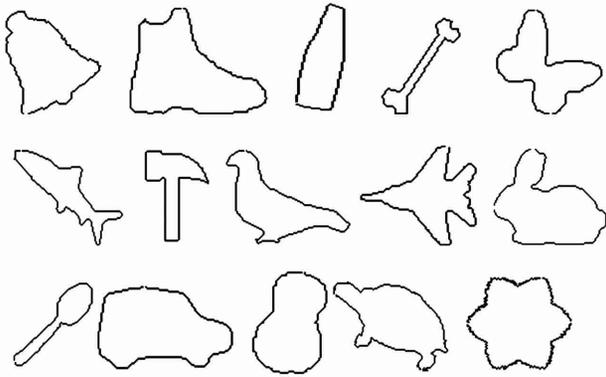


图4 测试图形的原始形状

4.2 形状描述效果

对于图 4 所示的图形, 究竟需要用多少次隐式多项式曲线进行描述, 文献[12]提出了具体的次数确定算法, 根据该文献的方法, 对图 4 中的 15 个图形确定的次数如表 1 所示. 也就是 Bone, Fish 和 Turtle 使用 8 次隐式多项式曲线进行描述, 其它图形使用 6 次隐式多项式曲线进行描述.

根据式(8)和式(9)计算图 4 中 15 个形状图形的极值点和对应的曲率, 如表 1 所示. 观察该表可以发现, Boot, Bottle, Bird, Rabbit, Spoon, Car, Guitar 和 Hexagon 这 8 个图形在 $x_k = 1$ 时计算的极小值点对应的曲率小于

0.1, 这说明该极小值点不能作为权重, 需要根据式(6)计算这 8 个图形对应的曲率极大值, 计算的结果如表 1 的最后一列. 图 5 是根据表 1 中自适应确定的权重以后, 使用隐式多项式曲线描述的图形, 其中粗实线为隐式多项式曲线, 细虚线为原始形状. 图 6 为分别使用 M3L, 没有加权的 GradientOne 和 Min-Max 三种算法获得的隐式多项式曲线. 可以观察到本文提出的自适应权重获得隐式多项式曲线, 十分精确地描述了各种目标形状, 而且没有多余的曲线, 但是用其它三种描述算法, 都没有很好的描述形状曲线, 主要问题是除了描述形状曲线以外, 出现了多余的曲线部分. 图 6 中, Bone, Car, Fish 和 Turtle 等图形不仅在图形外边有多余曲线, 而且内部和边缘也出现多余曲线, 除了 Hexagon 以外, 其它图形描述的隐式多项式曲线都不够稳定.

表 1 自适应权重及其对应的曲率

图形编号	实验图形名称	拟合次数	极小值点作为权重	极小值点曲率	曲率极大值
1	Bell	6	1.4525	0.3109	—
2	Boot	6	9.4324	0.0004	1.5349
3	Bottle	6	3.4205	0.0161	1.3719
4	Bone	8	1.5301	1.4204	—
5	Butterfly	6	0.7487	1.9221	—
6	Fish	8	1.4092	0.7486	—
7	Hammer	6	1.2182	1.0768	—
8	Bird	6	2.1707	0.0981	1.3055
9	Fighter	6	0.7880	1.7814	—
10	Rabbit	6	4.5073	0.0044	1.4429
11	Spoon	6	2.4059	0.0931	1.4145
12	Car	6	18.9931	0.0001	1.6063
13	Guitar	6	8.3804	0.0005	1.5851
14	Turtle	8	2.6631	0.1179	—
15	Hexagon	6	25.6768	0.0001	1.5678

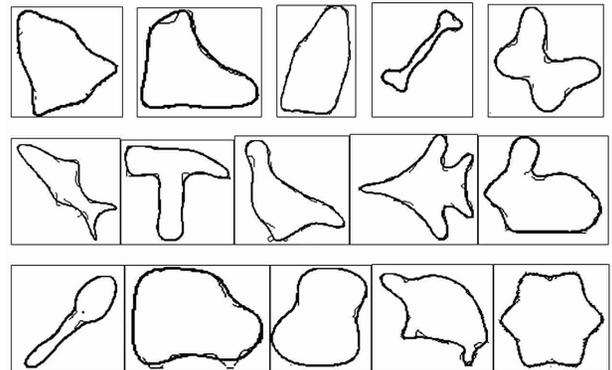


图5 自适应权重描述的隐式多项式曲线

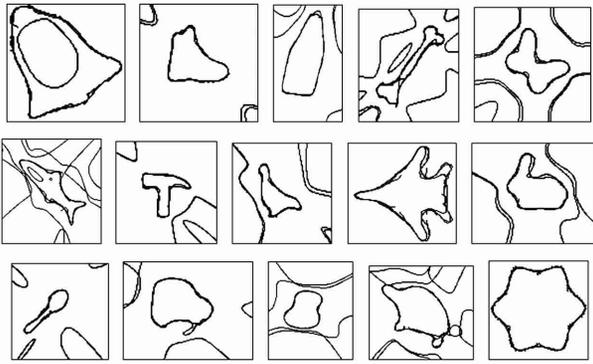


图6 M3L, GradientOne以及Min-Max描述的隐式多项式曲线

4.3 目标形状描述的性能评价

为了确定隐式多项式曲线是否精确、稳定地描述了数据点集合,文献[10]给出了两种度量标准,一个是距离度量函数,另一个是光滑度量函数,具体度量函数公式可以参阅该文献.距离度量函数值越小,则隐式多项式曲线描述效果越好,因为目标形状曲线上的点到隐式多项式曲线的距离越小,表明这些点近似落在了隐式多项式曲线上;和距离度量相反,光滑度量函数值越小,则表明隐式多项式曲线描述越差,这是因为光滑度量表示隐式多项式函数的法矢量和目标形状曲线法矢量的内积.显然内积越小,法向量夹角则越大,即隐式多项式曲线和目标形状曲线的形状不一致.但是我们通过图1的分析可知,即使距离度量很小,光滑度量很大,仍然不能说明隐式多项式曲线有效的描述了目标形状曲线,这是因为隐式多项式曲线在描述目标形状时,我们要求其稳定,也就是目标形状上点的微小变化,对隐式多项式曲线的系数影响不大,但是图1中权重取0.3和权重取1.6时候,虽然前者和后者相比较距离度量较小,光滑度量较大,但是后者更好的描述了Car的形状,因为后者没有多余曲线分支,这说明它较为稳定.因此评价一个隐式多项式曲线的系数不仅仅要依据其距离度量和光滑度量,更重要的是依据其系数是否稳定可靠,也就是描述的隐式多项式曲线没有分支,即没有多余曲线.

文献[1~8]等都讨论了隐式多项式曲线的稳定性问题,这个问题的重要意义在于只有稳定的隐式多项式曲线才能在目标识别和其它图像处理中获得应用.而稳定性的一个重要指标就是系数的范数变化率较小,或者系数的范数较小,也就是隐式多项式曲线的各项系数的值较小.这是因为目标形状上数据点的微小变化,不会被对应项的系数放大.

图7是使用以上4种描述算法计算出来的15幅图形的距离度量柱状图,图8是相应的光滑度量柱状图.柱状图横坐标和表1中图形的编号相对应.每一幅图形的柱状图对应的描述算法分别是M3L, GradientOne, Min-

Max以及本文提出的自适应权重算法.观察图7,除了第2幅和第14幅图形,也就是Boot和Turtle以外,其它图形的自适应权重算法描述的距离度量和另外三种描述方法比较差距不大.图8中的自适应权重算法和另外三种算法的光滑度量也相差不大.但是,我们观察图9的隐式多项式曲线的系数范数,可以明显的发现自适应权重描述方法系数范数最小,除了第4幅图形(Bone)比GradientOne算法稍大,其它各个图形的自适应权重算法计算的隐式多项式曲线系数向量范数十分小,甚至小于10个单位,这说明自适应权重确定的隐式多项式曲线十分稳定,事实上我们从图5观察到,它们对应的拟合曲线没有多余分支曲线,而且比较精确地描述了目标形状.这说明自适应权重描述方法在保证和其它描述算法在距离度量和光滑度量变化不大的情况下,最大程度的降低了隐式多项式曲线系数的数值,保证了描述的隐式多项式曲线更加稳定.

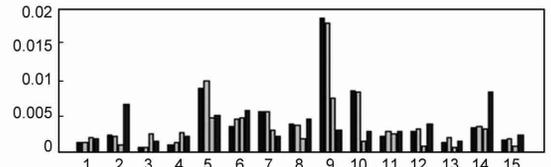


图7 形状曲线的各种算法的距离度量

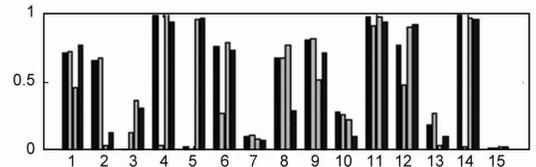


图8 形状曲线的各种算法的光滑度量

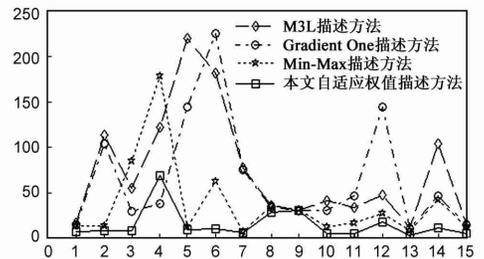


图9 形状曲线的各种算法系数向量范数值

5 结论

本文对目前最新的一些线性隐式多项式曲线描述算法进行了分析,指出平衡代数残差和形状梯度残差的权重是基于隐式多项式曲线进行目标形状描述的关键,进而从理论上给出了确定权重的公式,提出了自适应确定权重的算法,给出了确定权重的依据,克服目前基于隐式多项式曲线进行数据建模只能通过人工交互主观选择权重的问题.实验表明,这种自适应权重的选择十分有效,获取的隐式多项式曲线对目标形状的描述

述没有出现发散或者多余曲线分支,而且在目标形状的描述中,隐式多项式曲线没有出现退化现象,这为隐式多项式曲线的应用提供了可靠的保证。

参考文献

- [1] G Taubin, F Cukirman, S Sullivan. Parameterized families of polynomials for bounded algebraic curve and surface fitting [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(3): 286 - 303.
- [2] 吴刚, 李道伦. 基于隐含多项式曲线仿射不变量的目标识别[J]. 电子学报, 2004, 32(12): 1987 - 1991.
Wu Gang, Li Dao-lun. Object recognition based on affined invariants in implicit polynomial curves [J]. Acta Electronica Sinica. 2004, 32(12): 1987 - 1991. (in Chinese)
- [3] T Tasdizen. Robust and Repeatable Fitting of Implicit Polynomial Curves to Point Data Sets and to Intensity Images[D]. Rhode Island, USA: Brown University, 2001.
- [4] D Keren, D Cooper. Describing complicated objects by implicit polynomial[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(1): 38 - 53.
- [5] S Sullivan, L Sandford, JPonce. Using geometric distance fits for 3D object modeling and recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, 16(12): 1183 - 1196.
- [6] D Keren, Craig Gotsman. Fitting curves and surfaces with constrained implicit polynomials[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(1): 31 - 41.
- [7] M Blane, Z lei. The3L algorithm for fitting implicit polynomial curves and surfaces to data[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(3): 298 - 313.

- [8] T Tasdizen, J Tarel. Improving the stability of algebraic curves for application[J]. IEEE Trans Image Processing, 2000, 9(3): 405 - 416.
- [9] A Heizer, M Barzohar, D malah. Stable fitting of 2D curves and 3D surfaces by implicit polynomials[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(10): 1283 - 1294.
- [10] Bo Zheng, Jun Takamatsu, Katsushi Ikeuchi. An adaptive and stable method for fitting implicit polynomial curves and surfaces[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(3): 561 - 567.
- [11] D Zhang, G Lu. Study and evaluation of different fourier method for image retrieval[J]. Image and Vision Computing, 2005, 23(1): 33 - 49.
- [12] 吴刚. 隐含多项式曲线曲面拟合次数的确定研究[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(1): 148 - 153.
Wu Gang. Research on degree of fitting implicit polynomial curves and surfaces [J]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 44(1): 148 - 153. (in Chinese)

作者简介



吴 刚 男, 1969 年 6 月出生江苏邳州, 博士. 主要从事模式识别和计算机视觉方面的研究工作.

E-mail: wugang69@gmail.com